Université Abdelmalek Essaadi. Ecole Nationale des Sciences Appliquées - Tétouan. Cycle Classes Préparatoires. 1ère année. S2. Module : Analyse 2. M. Cherkaoui

Contrôle continu 2. Mardi 21 juin 2011. (Durée : 2 heures 30 minutes)

Les documents et les téléphones portables sont interdits. Bon travail et bon courage.

Questions du cours. (Sur les séries de Fourier) (4,5 pts)

1) (2 pts) Enoncer le Théorème de Dirichlet **OU** le Théorème de Jordan.

2) (1 pt) Donner les expressions des coefficients d'une série de Fourier associée à une fonction f (On suppose f $2\pi-$périodique)

3) (1,5 pt) Enoncer le théorème qui donne l'**Egalité de Parseval**.

Exercice 1. (Sur les séries numériques) (6 pts)

Soient deux séries numériques de termes généraux définies par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad \forall n \geq 2.$$

1) (1 pt) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

2) (2 pts) On pose $w_n = u_n - v_n,\ n \geq 2$. Quelle est la nature de la série numérique $\sum w_n$?

3) (0,5 pt) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

4) (2,5) Etudier la nature de la série de terme général $t_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$, $n \geq 2$, avec $\alpha > 0$.

Exercice 2 (Sur les séries entières) (4 pts)

1) (1 pt) Vérifier que la fonction définie par $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution de l'équation différentielle

$$\left(1-x^2\right) y' - xy = 1 \qquad (*)$$

2) (2 pts) f est développable en séries entières. En utilisant l'équation (*), donner le développement en série entière de la fonction f. (Indication : remarquer que f est impaire. Trouver la relation de recurrence qui lie les coefficients de la série entière et vérifier que $a_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$)

3) (1 pt) Calculer le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 3 (Sur les séries de fonctions) (5,5 pts)

Soit $I =]1, +\infty[$. Pour $x \in I$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1) (1 pt) Montrer que f est définie sur I.

2) a) (1 pt) Montrer que $\forall a > 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

b) (1 pt) En déduire que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$ est continue sur I.

3) a) (1,5 pts) Montrer que $\forall a > 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. (Indication. Vérifier que la fonction $x \mapsto \left|f_n'(x)\right|$ est décroissante sur $[a, +\infty[$)

b) (1 pt) En déduire que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$ est classe C^1 sur I.

